MATHEMATIQUES

LA REDACTION ET LA PRESENTATION SONT PRISES EN COMPTE POUR 4 POINTS.

LES CALCULATRICES SONT AUTORISEES.

DUREE : 2 HEURES

22

ACTIVITES NUMERIQUES

Dans toute cette partie, les résultats des calculs demandés doivent être accompagnés d'explications, le barème en tiendra compte.

Exercice 1

Soient les expressions $A = \frac{9}{5} - \frac{2}{5} \times \frac{11}{4}$ et $B = 5\sqrt{3} - 4\sqrt{27} + \sqrt{75}$.

1) Calculer A en détaillant les étapes du calcul et écrire le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

2) Calculer et écrire B sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des entiers relatifs, b étant un nombre positif le plus petit possible.

Exercice 2

On considère l'expression $C = (2x-1)^2 + (2x-1)(x+5)$.

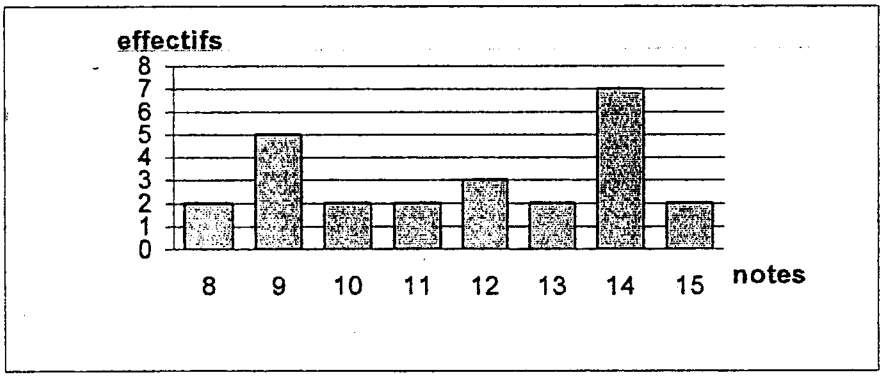
1) Développer et réduire l'expression C.
2) Factoriser l'expression C.
3) Résoudre l'équation $(2x-1)(3x+4) = 0$.

Exercice 3

1) Les nombres 682 et 352 sont-ils premiers entre eux ? Justifier.
2) Calculer le plus grand diviseur commun (PGCD) de 682 et 352.
3) Rendre irréductible la fraction $\frac{682}{352}$ en indiquant clairement la méthode utilisée.

Exercice 4

Le diagramme en barres ci-dessous donne la répartition des notes obtenues à un contrôle de mathématiques par les élèves d'une classe de 3ème.



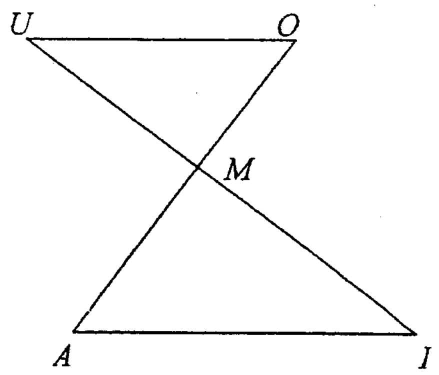
1) Combien d'élèves y a-t-il dans cette classe ?
2) Quelle est la note moyenne de la classe à ce contrôle ?
3) Quelle est la note médiane ?
4) Quelle est l'étendue de cette série de notes ?

12

ACTIVITES GEOMETRIQUES

Exercice 1

Les segments $[OA]$ et $[UI]$ se coupent en M.
On a : $MO = 21$, $MA = 27$, $MU = 28$, $MI = 36$, $AI = 45$
(l'unité de longueur étant le millimètre).



1) Prouver que les droites (OU) et (AI) sont parallèles.
2) Calculer la longueur OU.
3) Prouver que le triangle AMI est un triangle rectangle.
4) Déterminer, à un degré près, la mesure de l'angle $\widehat{AIM}$.
5) Montrer que les angles $\widehat{MAI}$ et $\widehat{MOU}$ ont la même mesure.

Exercice 2

Sur la figure annexe que vous devrez rendre avec la copie, on considère la figure $\mathcal{F}$.

1) Construire :

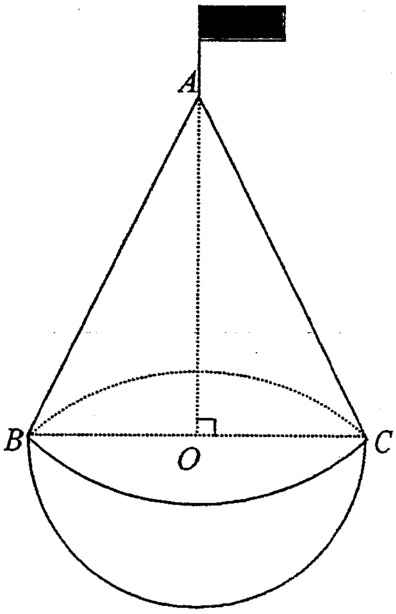
   a) la figure $\mathcal{F}_1$, image de la figure $\mathcal{F}$ par la symétrie centrale de centre B (nommer E l'image de A).
   b) la figure $\mathcal{F}_2$, image de la figure $\mathcal{F}_1$ par la symétrie centrale de centre C (nommer T l'image de E).

On hachurera, sur le dessin, les figures $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ ainsi obtenues.

2) Quelle transformation permet de passer directement de la figure $\mathcal{F}$ à $\mathcal{F}_2$?

Exercice 3

La balise ci-contre est formée d'une demi-boule surmontée d'un cône de révolution de sommet A.
Le segment $[BC]$ est un diamètre de la base du cône et le point O est le centre de cette base.
On donne $AO = BC = 6$ dm .



1) Montrer que : $AB = 3\sqrt{5}$ dm.
2) Dans cette question, on se propose de calculer des volumes.
   a) Calculer en fonction de π le volume du cône (on donnera la valeur exacte de ce volume)
   b) Calculer en fonction de π le volume de la demi-boule (on donnera la valeur exacte de ce volume).
   c) Calculer la valeur exacte du volume de la balise, puis en donner la valeur arrondie à $0{,}1\,\text{dm}^3$ près.

On rappelle que si V est le volume d'une boule de rayon R, $V = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3$.

On rappelle que si V est le volume d'un cône de hauteur h et de rayon r, $V = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3}$.

13

PROBLEME

On considère un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 6$ cm et $AC = 4$ cm.

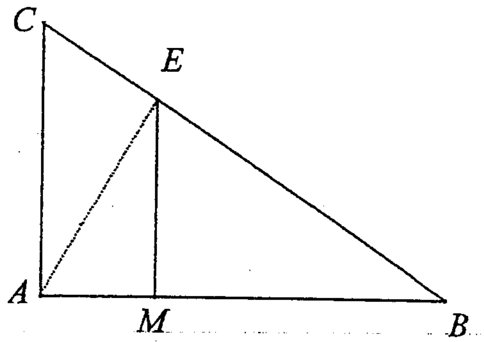
PARTIE 1

1) Construire ce triangle.

2) Placer le point M sur le segment $[AB]$ tel que : $BM = 3{,}5$ cm et tracer la droite passant par le point M et perpendiculaire à la droite (AB) ; elle coupe le segment $[BC]$ en E.
   a) Calculer AM.
   b) Démontrer que les droites (AC) et (ME) sont parallèles.
   c) Calculer EM (on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible).
   d) Le triangle AEM est-il un triangle isocèle en M ?

PARTIE 2

On souhaite placer le point M sur le segment $[AB]$ de façon à ce que le triangle AEM soit isocèle en M comme sur la figure ci-contre que l'on ne demande pas de refaire.
On rappelle que : $AB = 6$ cm et $AC = 4$ cm.



1) On pose $BM = x$ (on a donc : $0 \leq x \leq 6$). Démontrer, en utilisant la propriété de Thalès, que

$$ME = \frac{2}{3}x.$$

2) *Première résolution du problème posé.*
   a) Montrer que : $MA = 6 - x$.
   b) Calculer x pour que le triangle AME soit isocèle en M.

3) Soit un repère orthogonal avec pour unités 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.
   a) Représenter, dans ce repère, les fonctions f et g définies par :

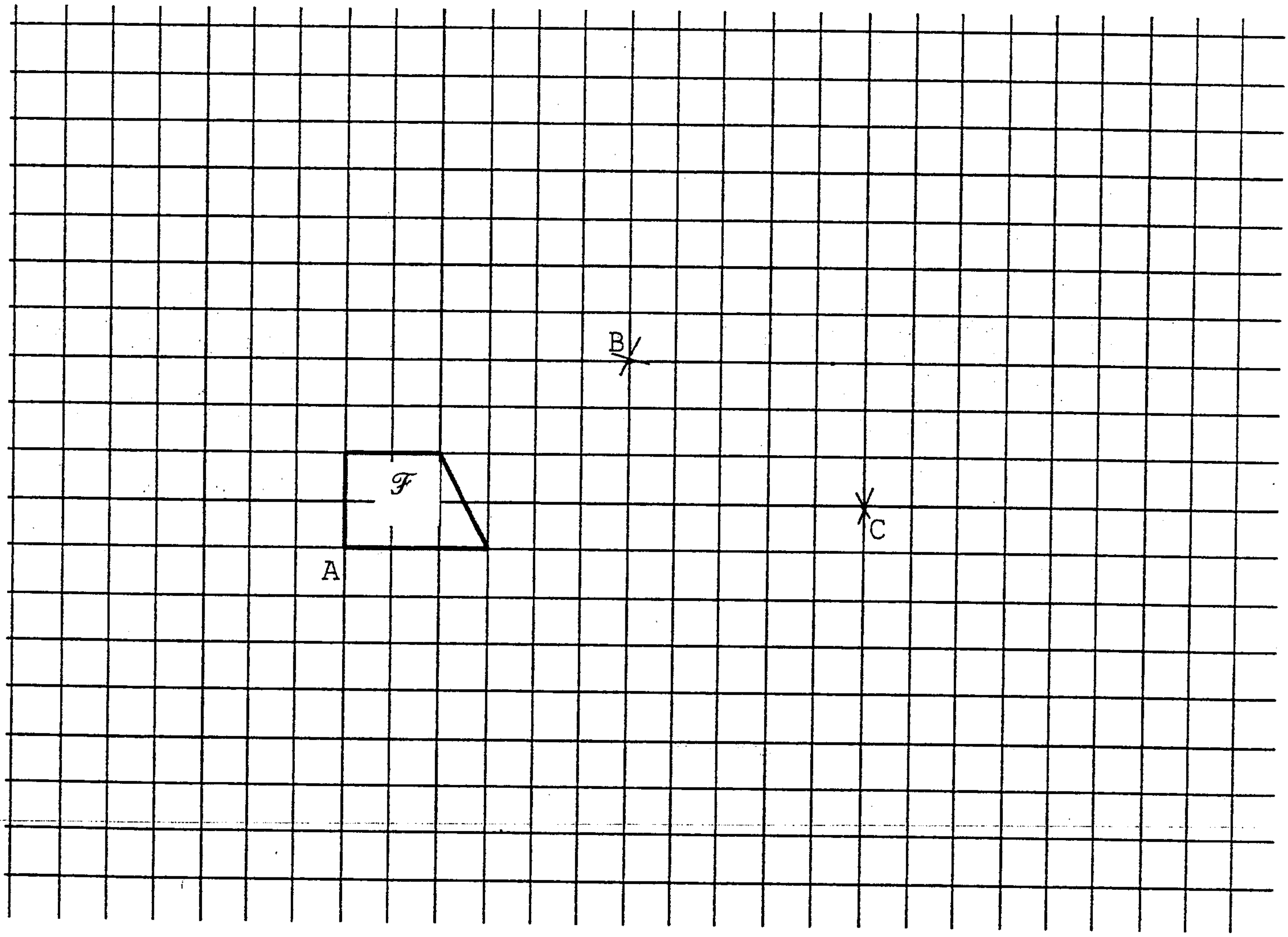
$$f(x) = \frac{2}{3}x \text{ et } g(x) = 6 - x \text{ , pour } 0 \leq x \leq 6.$$

   b) En utilisant ce graphique, retrouver le résultat de la question 2)b).

Feuille annexe à rendre avec la copie

Activités géométriques

Exercice 2



15

Exercice	Question	CORRIGE DU SUJET A SESSION 2004	Barème
Activités Numériques			
Exercice 1	1)	$A=\frac{9}{5}-\frac{2\times 11}{5\times 4}=\frac{9\times 4-22}{20}=\frac{14}{20}=\frac{7}{10}.$	1
	2)	$B=5\sqrt{3}-12\sqrt{3}+5\sqrt{3}=-2\sqrt{3}.$	1,5
Exercice 2	1)	$C=\left(4x^2-4x+1\right)+\left(2x^2+10x-x-5\right)=6x^2+5x-4.$	1
	2)	$C=(2x-1)\left[(2x-1)+(x+5)\right]=(2x-1)(3x+4).$	1
	4)	Un produit de facteurs étant nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul, on a : $(2x-1)(3x+4)=0 \Leftrightarrow 2x-1=0$ ou $3x+4=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ ou $x=-\frac{4}{3}.$ Les deux solutions demandées sont : $x=\frac{1}{2},\quad x=-\frac{4}{3}.$	1,5
Exercice 3	1)	Les nombres 682 et 352 sont pairs tous les eux et donc divisibles au moins par 2 : ils ne sont pas premiers entre eux.	0,5
	2)	Avec la méthode de l'algorithme d'Euclide : $682=352\times 1+330$ donc : $\text{PGCD}(682,352)=\text{PGCD}(352,330).$ $352=330\times 1+22$ donc : $\text{PGCD}(352,330)=\text{PGCD}(330,22).$ $330=22\times 15+0$ donc : $\text{PGCD}(330,22)=22.$	1,5
	3)	Avec ce qui précède : $\frac{682}{352}=\frac{31\times 22}{16\times 22}=\frac{31}{16}$, cette dernière fraction étant irréductible.	1
Exercice 4	1)	La somme des effectifs est : $2+5+2+2+3+2+7+2=25.$ Il y a 25 élèves dans cette classe.	0,5
	2)	La note moyenne est : $\overline{m}=\frac{8\times 2+9\times 5+10\times 2+11\times 2+12\times 3+13\times 2+14\times 7+16\times 2}{25}=11{,}72.$	1
	3)	La note médiane est, dans l'ordre croissant des notes, la première note dont l'effectif cumulé dépasse les 50% de l'effectif total. Les effectifs cumulés étant successivement 2, 7, 9, 11, 14, la médiane est la note 12.	1
	4)	L'étendue est la différence entre la note la plus élevée et la note la plus faible. Elle est égale à 7.	0,5
Activités géométriques			
Exercice 1	1)	Dans le triangle *AMI*, les points *A*, *M*, *O* d'une part, *I*, *M*, *U* d'autre part sont dans le même ordre.	

76

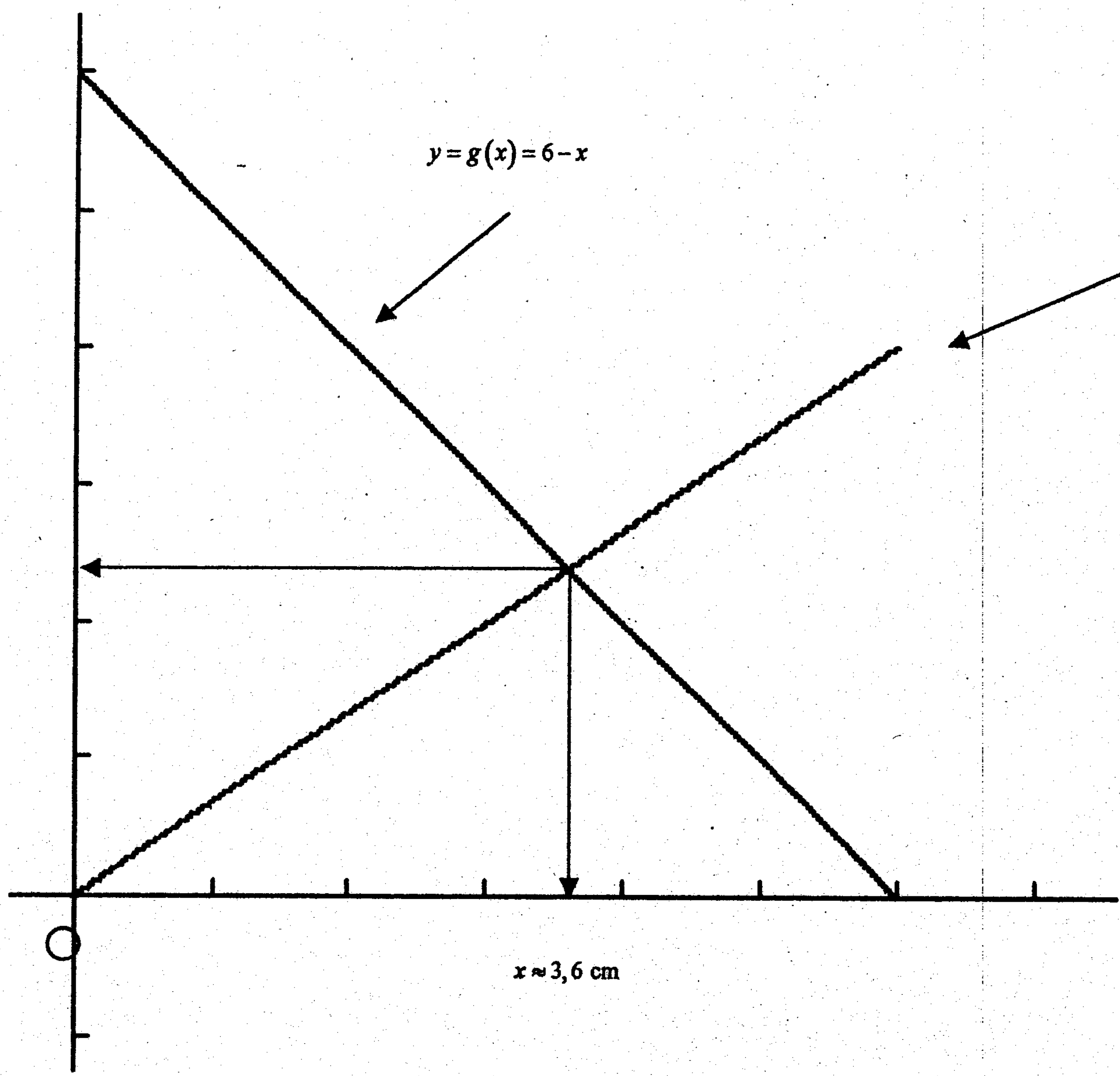
		On a aussi : $\frac{MI}{MU}=\frac{36}{28}=\frac{9}{7}$ et $\frac{MA}{MO}=\frac{27}{21}=\frac{9}{7}$ donc : $\frac{MI}{MU}=\frac{MA}{MO}$. D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (OU) et (AI) sont parallèles.	1
	2)	Toujours en utilisant le théorème de Thalès, on a aussi : $\frac{9}{7}=\frac{MI}{MU}=\frac{MA}{MO}=\frac{AI}{OU}$ d'où : $OU=\frac{7}{9}AI=35$.	1
	3)	On a : $AI^2-MA^2-MI^2=2025-729-1296=0$. D'après le théorème réciproque de Pythagore appliqué au triangle AMI, celui-ci est rectangle en M.	1
	4)	Dans le triangle rectangle AMI, on peut écrire : $\cos\left(\widehat{\mathrm{AIM}}\right)=\frac{MI}{AI}=\frac{36}{45}=0,8.$ On en déduit : $\widehat{\mathrm{AIM}}=37°$, au degré près.	1
	5)	Les deux angles $\widehat{MAI}$ et $\widehat{MOU}$ sont des angles alternes-internes associés aux deux droites parallèles (OU) et (AI). Ces deux angles ont donc la même mesure.	1

Exercice 2	1)a)	Construction demandée :	1
	1)b)	Construction demandée :	1
	2)	La composition de deux symétries centrales étant une translation, on passe de la figure $\mathscr{F}$ à la figure $\mathscr{F}_2$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AT}$.	1
Exercice 3	1)	La droite (AO) est perpendiculaire à la droite (BO) : le triangle AOB est donc un triangle rectangle en O et on peut utiliser le théorème de Pythagore : $AB^2=AO^2+OB^2=36+9=45$ donc : $\mathrm{AB}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$ dm.	1
	2)a)	Le volume du cône est : $\mathscr{V}_1=\frac{1}{3}\pi\times9\times6=18\pi\left(\text{en dm}^3\right)$.	1
	2)b)	Le volume de la demi-boule est $\mathscr{V}_2=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\pi\times27=18\pi\ \left(\text{en dm}^3\right)$.	1
	2)c)	Le volume de la balise est la somme des deux volumes précédents. Il est égal à $\mathscr{V}=36\pi\ \text{dm}^3$, c'est-à-dire : 113,1 au dixième de dm^3 près.	1
Problème			

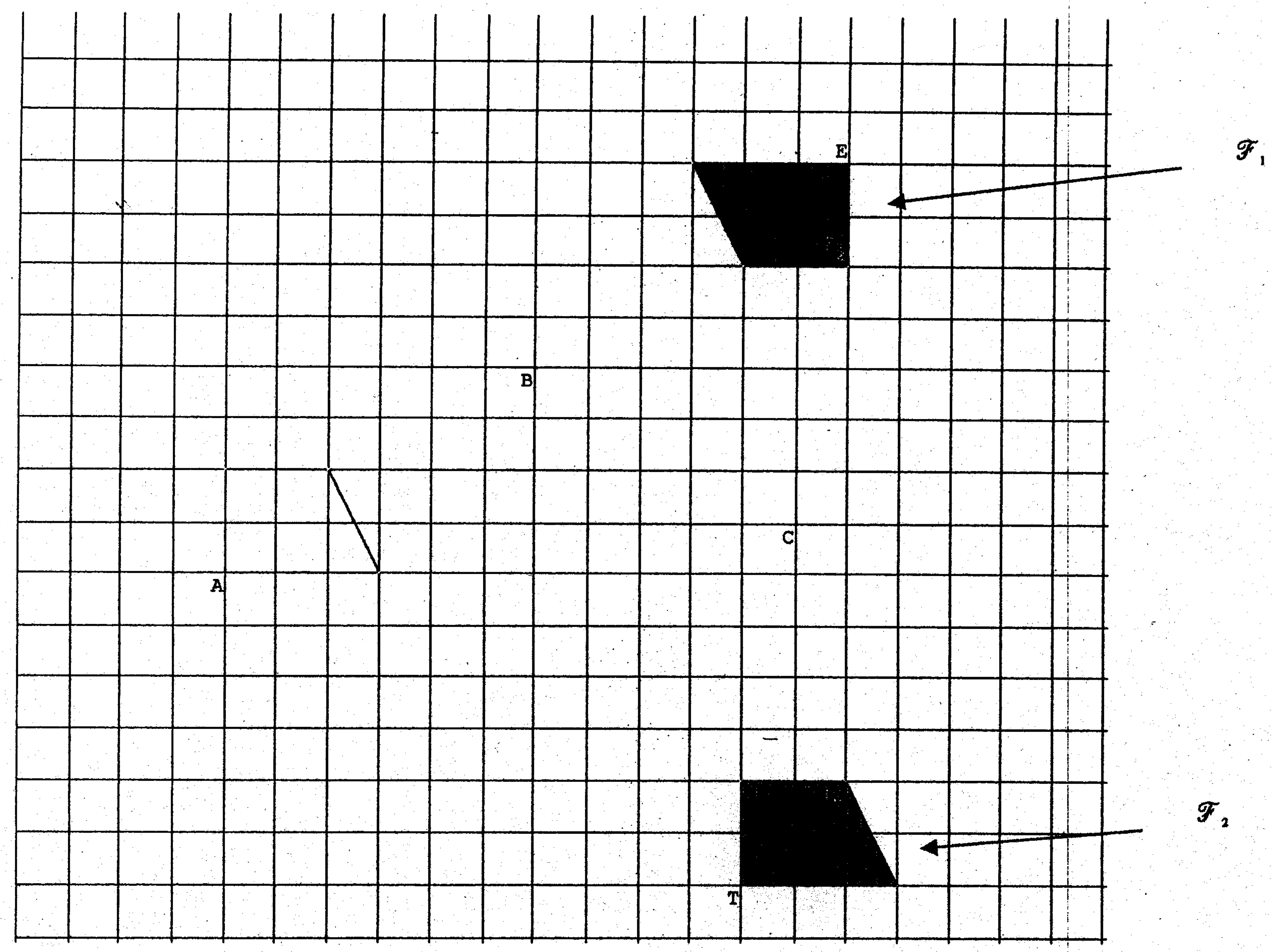
72

Première partie	1)	Construction du triangle	1
	2)a)	M appartenant au segment $[AB]$, on a : $AM + MB = AB$ d'où : $AM = 6 - 3,5 = 2,5$ cm.	0,5
	2)b)	Les droites (AC) et (ME) sont toutes les deux perpendiculaires à la droite (AB) : elles sont donc parallèles.	1
	2)c)	Avec le parallélisme précédent et le théorème de Thalès appliqué au triangle CAB, on peut écrire : $\frac{BM}{BA} = \frac{EM}{CA}$ d'où : $EM = 4 \times \frac{3,5}{6} = \frac{7}{3}$ cm, soit environ : 2,33 cm. (on admettra les deux réponses)	1,5
	2)d)	On a $AM = 2,5$ cm et $ME \approx 2,3$ cm : $AM \neq ME$, le triangle AEM n'est pas un triangle isocèle en M.	1
Deuxième partie	1)	Toujours avec le parallélisme des droites (AC) et (ME) et en appliquant le théorème de Thalès dans le triangle ABC, on obtient : $\frac{BM}{BA} = \frac{ME}{AC}$ d'où : $ME = AC \times \frac{BM}{BA} = 4 \times \frac{x}{6} = \frac{2}{3}x$.	1,5
	2)a)	M appartenant au segment $[AB]$, on a : $AM + MB = AB$ d'où : $AM = 6 - MB = 6 - x$.	1
	2)b)	Le triangle AME est isocèle en M si et seulement si : $AM = ME$ c'est-à-dire si et seulement si : $6 - x = \frac{2}{3}x \Leftrightarrow \frac{5x}{3} = 6 \Leftrightarrow x = 3,6$ (en cm).	1,5
	3)a)	Construction des deux courbes représentatives des fonctions f et g.	2
	3)b)	Mise en évidence graphique.	1

28



Problème : questions Partie 2 3)a) et 3)b)



Activités géométriques : exercice N° 2